SAMOUPRAVNA INTERESNA ZAJEDNICA
ZA ZNANSTVENI RAD
SIZ - I SR HRVATSKE

NUMERIČKE METODE U TEHNICI

ZNANSTVENI SKUP

ZAGREB
16. studenog 1979.

Referat broj 2.09

NUMERIČKA METODA ZA IZRAČUNAVANJE SILE GRADIJENTA TLAKA U SIGMA KOORDINATNOM SISTEMU

Bojan Lipovšćak

Centar za meteorološka istraživanja
Republički hidrometeorološki zavod, Zagreb

1. UVOD

Za prikaz vertikalne strukture atmosfere u numeričkim modelima za prognozu vremena moguć je izbor različitih vertikalnih koordinata. Ovisno o izboru vertikalne koordinate sistem jednadžbi koje prikazuju dinamiku i termodinamiku atmosfere poprima različite oblike. Neki od njih su pogodniji za numeričku integraciju od drugih.

Phillips (1957) predlaže bezdimenzionalnu vertikalnu koordinatu sigma, izvedenu iz tlaka kao vertikalne koordinate, kod koje je površina tla uvijek koordinatna ploha. Vertikalna koordinata sigma definirana je kao omjer tlaka na nekom nivou modela i tlaka pri tlu atmosfere modela:

$$\sigma = \frac{p}{p_s} , \tag{1}$$

ili u proširenijem obliku

$$\sigma = \frac{p - p_t}{p_s - p_t} . \tag{2}$$

Uobičajena je pokrata $\Pi = p_s - p_t$ uz koju (2) poprima oblik:

$$\sigma = \frac{p - p_t}{\Pi} . \tag{3}$$

Vrijednosti σ smanjuju se idući u vis od vrijednosti $\sigma = 1.$, za $p = p_s$, do $\sigma = 0.$, za $p = p_t$.

Primjenom sigma vertikalne koordinate sačuvane su sve "dobre" osobine tlaka kao vertikalne koordinate, tj. jednadžba kontinuiteta je jednostavnog oblika, specifična gustoća se ne pojavljuje eksplicite i vertikalni valovi zvuka su potpuno filtrirani. Upotrebom sigma vertikalne koordinate izbjegnute su računske poteškoće u tretiranju donjeg rubnog uvjeta koje se javlja kod koordinatnog sistema s vertikalnom koordinatom tlakom kod kojeg izobarne plohe presjecaju površinu tla modela.

Sistem jednadžbi koje prikazuju dinamiku i termodinamiku atmosfere u sigma koordinatnom sistemu uz hidrostatičku aproksimaciju glase:

jednadžba gibanja

$$\frac{d\vec{v}}{dt} + f\,\vec{K}\times\vec{v} + \left(\nabla_\sigma\phi - \frac{\sigma}{\Pi}\nabla\Pi\,\frac{\partial\phi}{\partial\sigma}\right) = \vec{F}, \qquad (4)$$

jednadžba kontinuiteta

$$\nabla(p_s\vec{v}) + p_s\frac{\partial\dot{\sigma}}{\partial\sigma} + \frac{\partial p_s}{\partial t} = 0, \qquad (5)$$

jednadžba prvog principa termodinamike

$$c_p\,\frac{d\,\ln\theta}{dt} = \frac{dq}{dt}, \qquad (6)$$

jednadžba hidrostatike

$$\frac{\partial\phi}{\partial\sigma} = -\,\frac{RT}{\sigma}, \qquad (7)$$

jednadžba stanja

$$p\alpha = RT \qquad (8)$$

gdje je

$$\theta = \left(\frac{p}{\sigma p_s}\right)^{\frac{R}{c_p}} T$$

potencijalna temperatura.

Primjena sigma koordinatnog sistema u modelima za numeričku prognozu vremena povezana je s poteškoćom koja se javlja u izračunavanju sile gradijenta tlaka u konačnim razlikama, posebno u oblastima sa strmom topografijom tla, odnosno strmim nagibom sigma koordinatnih ploha. Sila gradijenta tlaka prikazana je izrazom u zagradi jednadžbe (4). Problem u izračunavanju sile gradijenta tlaka u sigma koordinatnom sistemu, u prisustvu strme topografije, pojavljuje se pri rješavanju jednadžbe gibanja u diskretiziranom obliku. Sila gradijenta tlaka izražena je sumom dvaju članova suprotnog predznaka, koji u oblastima sa strmom topografijom mogu biti za više od red veličine veći od ukupne sile gradijenta tlaka. Relativno mala pogreška u izračunavanju aproksimacija konačnih razlika ovih članova može izazvati veliku pogrešku u izračunavanju njihove sume. Član u zagradi jednadžbe (4) može se napisati na više načina, u obliku pogodnom za diskretizaciju. U cilju smanjenja pogreške nastale netočnim izračunavanjem prvog ili drugog člana sile gradijenta tlaka razvijeno je više shema, kompletan prikaz najčešće upotrebljavanih shema dan je u radu Lipovšćaka (1978).

2. HIDROSTATIČKI KONZISTENTNA SHEMA ZA IZRAČUNAVANJE SILE GRADIJENTA TLAKA

Janjić (1977) je pokazao da je većina upotrebljavanih shema za izračunavanje sile gradijenta tlaka hidrostatički nekonzistentna. Pri izračunavanju prvog i drugog člana sile gradijenta tlaka upotrebljavaju se različiti oblici jednadžbe hidrostatike pisane u konačnim razlikama. Vrijednosti geopotencijala, potrebne za izračunavanje prvog člana sile gradijenta tlaka, računate su iz polja temperature, integracijom jednadžbe hidrostatike od tla do vrha atmosfere modela iznad odredjene točke mreže; a drugi član sile gradijenta tlaka čije fizikalno značenje je razlika u nagibima izobarnih i ploha konstantne sigma vrijednosti, izračunavan je diferenciranjem jednadžbe hidrostatike u konačnim razlikama na osnovu vrijednosti sa dva susjedna nivoa.

Janjić (1977) objašnjava pogrešku u odredjivanju sile gradijenta tlaka u sigma koordinatnom sistemu kao rezultat primjene $-\nabla$ operatora na izobarnom nivou na vrijednosti geopotencijala dobivene ekstrapolacijom sa sigma nivoa. Problem se svodi na iznalaženje optimalne sheme za interpolaciju geopotencijala na izobarne plohe s ploha konstantne sigma vrijednosti. Sila gradijenta tlaka može se napisati u općem obliku kao:

$$-\nabla_\sigma \phi + \frac{\partial \phi}{\partial \zeta} \nabla_\sigma \zeta \,, \qquad (9)$$

gdje je

$$\zeta = \zeta\,(p) \qquad (10)$$

kontinuirana funkcija tlaka. Da bi se izbjegla hidrostatička nekonzistentnost geopotencijal se, u oba člana izraza (9), izračunava aproksimacijom konačnih razlika jednadžbe hidrostatike, vertikalno diferencirane istom funkcijom ζ.

U HIBU modelu (Janjić 1977, Mesinger 1977) Janjić je pretpostavio za funkciju ζ oblik

$$\zeta = \ln^2 p \qquad (11)$$

pri kojem je jednadžba hidrostatike oblika:

$$\frac{\partial \phi}{\partial \zeta} = - \frac{R\,T.}{2\,\ln^2 p} \quad . \tag{12}$$

Kod Janjićeve sheme za izračunavanje geopotencijala i sile gradijenta tlaka u sigma koordinatnom sistemu iznos pogreške u izračunavanju sile gradijenta tlaka ovisi o izboru funkcije ζ. Pretpostavlja se zahtjev da pogreška bude minimalna uz pogodan izbor funkcije ζ. Umjesto oblika (11) pretpostavljamo da je funkcija ζ oblika:

$$\zeta = (1. + m\,x\,)\,x \tag{13}$$

gdje je

$$x = \ln p, \tag{14}$$

i optimalizacijom izračunamo vrijednost parametra m. Jednadžba hidrostatike (7) uz (13) glasi:

$$\frac{\partial \phi}{\partial \zeta} = - \frac{R\,T}{1+2mx} \quad . \tag{15}$$

X komponenta sile gradijenta tlaka pisana na k-tom nivou modela u konačnim razlikama glasi:

$$-\overline{\delta_x \phi}^{\sigma} + \overline{\delta_\zeta \phi}^{x}\;\overline{\delta_x \zeta}^{\sigma} \tag{16}$$

gdje se značenje uvedenih operatora u konačnim razlikama može prikazati na primjeru:

$$\overline{\phi}^{\sigma} = 1/2\,(\phi_{2K} + \phi_{2K-2})$$

$$\overline{\zeta}^{\sigma} = 1/2\,(\zeta_{2K} + \zeta_{2K-2})$$

$$\delta_\zeta \phi = (\phi_{2K} - \phi_{2K-2})/(\zeta_{2K} - \zeta_{2K-2})$$

3. IZRAČUNAVANJE FIKTIVNE SILE GRADIJENTA TLAKA U MODELU ATMOSFERE

Izvršeno je ispitivanje veličine pogreške koja se javlja u izračunavanju sile gradijenta tlaka upotrebom funkcije ζ oblika (11) i (13). Ispitana je vrijednost fiktivne sile gradijenta tlaka koja se pojavljuje zbog upotrebe sigma koordinatnog sistema, u slučaju kad je geopotencijal funkcija tlaka definirana relacijom, (Phillips 1974):

$$\phi = 1054.5 + 80397.3\ z - 7659.\ z^2 + 1110.\ z^3, \quad (18)$$

gdje je

$$z = -\ x + \ln\ (10^5), \quad (19)$$

a x je definiran jednadžbom (14).

Pretpostavimo dvije točke mreže jedinične udaljenosti duž x koordinatne osi, (analogni rezultati vrijede u y smjeru). Vrijednosti vertikalne sigma koordinate na parnim sigma nivoima modela neka su:

$$\sigma = 0.,\ .30,\ .55,\ .75,\ .90,\ 1.0;$$

Pretpostavimo da je u točkama mreže koje ćemo označiti s TM1 i TM2 prizemna vrijednost tlaka jednaka 1000 i 800 milibara. Prema jednadžbi (18) ovim vrijednostima odgovara vrijednost geopotencijala od 1054.5 m^2s^{-2} i 18625.727 m^2s^{-2}. Tlak na vrhu modela atmosfere neka je 100 milibara. Koristeći jednadžbe (12) i (15) pisane u konačnim razlikama, te relaciju (16), izračunat je prvi i drugi član sile gradijenta tlaka i njihova suma. U jednadžbi (15) korištene su dvije vrijednosti parametra m, optimalizacijom dobivena vrijednost m = -.579 (shema B) i vrijednost m = 0. (shema C). Rezultat je prikazan tabelom 1.

Tabela 1. Sila gradijenta tlaka i suma apsolutnih vrijednosti sile gradijenta tlaka za standardnu atmosferu definiranu jednadžbom (18).

shema	nivo K=1	3	5	7	9
A	-61.2	29.63	7.53	1.61	-6.16
B	-97.7	24.84	2.88	-0.13	-6.68
C	291.3	16.99	-3.61	-11.94	-16.72

Shema A i B daju vrijednosti sile gradijenta tlaka istog reda veličine na svim nivoima. Apsolutna vrijednost iznosa je kod sheme A manja na najvišem i najnižem k nivou od vrijednosti izračunate shemom B. Sheme A i B na dva najniža nivoa i na najvišem nivou daju silu gradijenta tlaka čiji je iznos za red veličine manji od sile gradijenta tlaka izračunate shemom C.

4. L I T E R A T U R A

Janjić, Z.I., 1977: Pressure gradient force and advection scheme used for forecasting with steep and small scale topography, Beitr. Phys. Atm., 50, 186-199

Lipovšćak, B., 1978: Usporedba nekoliko metoda za izračunavanje sile gradijenta tlaka u sigma koordinatnom sistemu, Magistralni rad, Sveučilište u Zagrebu, 47 str.

Mesinger, F., 1977: Forward - backward scheme, and its use in a limited area model, Beitr. Phys. Atm., 50, 200-210.

Phillips, N.A., 1957: A coordinate system having some special advantages for numerical forecasting, J.Meteor., 14, 184-185.

______________, 1974: Application of Arakawa´s energyconserving layer model to operational numerical weather prediction, NOAA, National Weather Service, NMC, off. Note 104, 40 str.

PRILOG

Popis upotrebljenih simbola

c_p	specifična toplina zraka pri konstantnom tlaku
f	Coriolisov parametar
$\vec{F}$	sila trenja po jedinici mase
K	indeks vertikalnih nivoa
$\vec{k}$	jedinični vektor
m	parametar
p	tlak
p_s	tlak pri tlu modela atmosfere
p_t	tlak na gornjoj granici modela atmosfere
R	specifična plinska konstanta
t	vrijeme
T	temperatura
$\vec{v}$	horizontalna brzina
x	koordinata u pravokutnom koordinatnom sistemu; pomoćna varijabla
z	pomoćna varijabla
α	specifični volumen
θ	potencijalna temperatura
Π	$p_s - p_t$
σ	vertikalna koordinata u sigma sistemu
$\dot{\sigma}$	vertikalna brzina u sigma sistemu
ϕ	geopotencijal
ζ	pomoćna varijabla