

BERECHNUNGSFEHLER DER GRADIENTKRAFT IM σ KOORDINATENSYSTEM
IN ANWESENHEIT DER STEILEN GEBIRGE

Bojan Lipovšćak
Hydrometeorologisches Institut
Zagreb, Jugoslawien

Abstract Arakawa, Corby et al. and Janjić have developed the methods for calculating the pressure gradient force in σ coordinate system which is particularly important in the case of steep topography. The methods are compared with the identical initial conditions. On the basis of Janjić's method a new choice of the interpolation function for geopotential is derived and tested in the procedure of numerical weather forecasting incorporating steep topography in the prediction model.

Zusammenfassung Arakawa, Corby u.a. und Janjić haben die Methoden zur Berechnung der Gradientkraft im σ Koordinatensystem entwickelt. Diese Methoden sind bei den gleichen Anfangsbedingungen verglichen worden. Auf Grund der Janjić-Methode wurde eine neue Extrapolationsfunktion des Geopotentials vorgeschlagen und in dem Modell für numerische Wettervorhersage mit steiler Topographie angewendet.

1. EINLEITUNG

Zur Berechnung der Gradientkraft (im weiteren Text GK) im σ Koordinatensystem in Anwesenheit der steilen Topographie, wurden einige Rechenschemas vorgeschlagen und benützt und alle haben die Verminderung des Fehlers und die genauere Wertbestimmung der GK zum Ziel. Den Beitrag der GK in der Bewegungsgleichung kann man im σ Koordinatensystem als Summe zweier Glieder der Form:

$$\nabla_{\sigma} \phi - \frac{\sigma}{\pi} \nabla \pi \frac{\partial \phi}{\partial \sigma} \quad (1)$$

bezeichnen. In den Gebieten mit der steilen Topographie können die Glieder der Gleichung (1) mehr als Reihengröße von der gesamten GK grösser sein. Ein relativ kleiner Fehler in der Berechnung der Differenzenapproximation dieser Glieder kann einen grossen Fehler in der Bestimmung ihrer Summe hervorrufen.

Arakawa (1972), Corby (1972) und Janjić (1977) entwickeln die Schemas für die GK-Berechnung (im weiteren Text Schemas A, B und C), die in diesem Artikel mit den gleichen Anfangsbedingungen verglichen wurden. Zum Ausrechnen des Geopotentials im ersten Glied der Gleichung (1) ist, ausser der Hydrostatikgleichung der vorgeschlagenen Schemas, auch das Schema von Glasnović (Vol. 1, S. 192) geprüft (im weiteren Text Schema D).

Im Modell mit primitiven Gleichungen für das begrenzte Gebiet, das die Topographie enthält, wird für die Berechnung der GK Schema C angewendet (Modell 1), Janjić (1977), Mesinger (1977). Einige Resultate der Prognose mit dem Modell 1 sind in den Artikeln von Branković (Vol. 1, S. 163) angeführt.

2. NEUE AUSWAHL DER EXTRAPOLATIONSFUNKTION DES GEOPOTENTIALS BEI SCHEMA C

Beim Schema C ist die folgende Form der Geopotentialfunktion vorausgesetzt:

$$\phi = (x, y, \xi) \quad (2)$$

wo ξ die kontinuierliche Druckfunktion ist, die die Extrapolationsweise des Geopotentials von σ Flächen an die Isobaren-Flächen beschreibt. Von der Auswahl der Funktion ξ hängt der Beitrag des Fehlers in der Berechnung der GK in Anwesenheit der steilen Topographie ab.

Vorausgesetzt ist die Funktion:

$$\xi = (1 + m \ln p) \ln p \quad (3)$$

Die GK (1), geschrieben in Differenzenapproximation der k-ten Modellfläche, lautet:

$$- (\nabla_{\sigma} \phi)_k + \frac{\partial \phi_k}{\partial \xi} \nabla \xi_k \quad (4)$$

wo

$$\frac{\partial \phi_k}{\partial \xi} = - \frac{R T_k}{1 + 2m \ln p_k} \quad (5)$$

die Hydrostatikgleichung darstellt.

Um den optimalen Wert des Parameters m zu bestimmen, bei dem der Extrapolationsfehler minimal ist, soll die Änderung nach m der zweiten Derivation des Geopotentials gering sein. Mit den annähernden Methoden ist der optimale Wert des Parameters m festgestellt und beträgt -0.0369 \approx -0.04 . Auf Grund der Einfachheit und wegen der Rechenzeiterparnis nahmen wir an, dass der Parameterwert $m = 0$ ist. Im weiteren Text ist dieses Schema als Schema E bezeichnet.

3. BERECHNUNG DER GRADIENTKRAFT

Die Schemas A, B, C, D und E zur Berechnung der GK sind bei drei verschiedenen Experimenten angewendet. Die gemeinsamen Merkmale der drei Experimente sind folgende:

1. vorausgesetzt sind zwei Gitterpunkte einheitlicher Entfernung auf horizontaler Fläche
2. die Berechnung der GK erfolgt auf denselben Flächen.

Die Schwierigkeit zeigt sich bei der Definition der σ Flächenanordnung, nämlich das Schema B ist auf Grund der Vertikalkoordinate σ ausgeführt, welche den Wert Null bekommt für $p_k = 0$, und die anderen Schemas auf Grund der Vertikalkoordinate σ , welche den Wert Null bekommt für $p_k = p_t$. Bei den Schemas A, C, D und E ist die Obergrenze $p_t = 100$ mbar und die Reihenfolge der σ Flächen ist mit den Werten

$$\sigma = .15, .425, .65, .835, .95$$

gegeben. Beim Schema B ist die Obergrenze auf den Druck $p_t = 0$ mbar gesetzt und noch eine σ Fläche dazu gegeben. Die σ Koordinatenwerte sind so gewählt, dass sich die σ Flächen des Schemas B auf denselben Isobarenflächen befinden wie die σ Flächen der Schemas A, C, D und E. Die Reihenfolge der σ Flächen, verwendet im Schema C, ist folgende:

$$\sigma = .05, .235, .4825, .685, .8425, .955.$$

3.1. Experiment I

Es wurde die Grösse des Wertes der fiktiven GK geprüft, die sich wegen der Anwendung des σ Koordinatensystems bei Anwesenheit der steilen Topographie ergibt, wenn Geopotential und Temperatur mit Relationen

$$\phi = 1054.5 + 80397.3 z - 7659 z^2 + 1110 z^3 \quad (6)$$

$$T = \frac{1}{R} (80397.3 - 15318 z + 3330 z^2) \quad (7)$$

$$z = -\ln p_k + \ln(10^5) \quad (8)$$

von Phillips (1974) definiert sind.

In den Gitterpunkten ist der Bodendruck 1000 und 800 mbar vorgegeben; diesen Werten entsprechen nach den Formeln (6) bis (8) Geopotentiale von 1054.5 und 18625.7 m^2/s^2 und Temperaturen von 280 und 274 K. Werden die Schemas aus den oben angeführten Anfangswerten benutzt, sind die Werte der GK ausgerechnet und in Tabelle 1 dargestellt.

Schema	k = 1	k = 3	k = 5	k = 7	k = 9
A, D	43.96	70.49	79.52	84.54	87.56
B	6.16	6.16	6.17	6.16	6.16
C	51.55	15.57	3.08	-1.55	-3.90
E	113.59	21.18	4.92	-2.37	-2.93

Tabelle 1: Die GK auf verschiedenen k-Niveaus nach den verschiedenen Schemas und für ϕ (6) und T (7) berechnet. Alle Werte in m^2/s^2 .

Das Schema B ergibt den kleinsten Fehler des konstanten Wertes in allen Schichten, was auch verständlich ist, weil das Schema mit der Voraussetzung, dass die Temperatur eine Linearfunktion des Drucklogarithmus sei, angewendet wurde. Die Schemas A und D ergeben gleiche Werte, deren Betrag mit der Höhe abnimmt und auf dem höchsten k-Niveau 50.2 % vom Betrag auf dem niedrigsten Niveau beträgt. Die Schemas C und E ergeben auf den drei niedrigsten Niveaus kleine Fehlerwerte, dagegen auf den höchsten Niveaus Fehler, welche um ein bzw. zwei Grössenordnungen grösser sind.

3.2. Experiment II

Das zweite Experiment basiert auf der Berechnung des Geopotentials aus dem Temperaturprofil. Die Temperatur wurde mit den Gleichungen (7) und (8) definiert, und die Geopotentiale im ersten und zweiten Glied der GK wurden auf Grund der entsprechenden Hydrostatikgleichung in der Differenzenapproximation berechnet. Die anderen Anfangsbedingungen sind die gleichen wie im Experiment I. Die Resultate sind in Tabelle 2 dargestellt.

Schema	k = 1	k = 3	k = 5	k = 7	k = 9
A	54.83	137.88	148.67	153.76	156.76
B	-5.28	-5.27	-5.27	-5.27	-5.27
C	-320.50	-32.67	-14.83	-9.00	-6.44
D	-1.58	81.45	92.25	97.33	100.33
E	35.73	-12.39	-11.33	-9.11	-7.78

Tabelle 2: Die GK auf verschiedenen k-Niveaus nach den verschiedenen Schemas und aus der Hydrostatikgleichung. Alle Werte in m^2/s^2 .

Der kleinste Fehler resultiert aus der Berechnung mit Schema B. Die Schemas C und E ergeben einen Fehler derselben Grössenordnung ausser auf dem höchsten Niveau, wo das Schema C einen Fehler um eine Grössenordnung grösser als Schema E liefert. Der grösste Fehler folgt aus Schema A, Schema D ergibt dagegen einen um eine Grössenordnung kleineren Fehler als Schema A.

3.3. Experiment III

Hier wurde die fiktive GK über den Gitterpunkten berechnet, wobei das Temperaturprofil durch Radiosondenaufstiege bestimmt wurde. Aus dem Temperaturprofil wurde mit Hilfe der Hydrostatikgleichung das Geopotentialprofil ausgerechnet. Für die Berechnung der GK sind die Daten der Radiosondenaufstiege vom 21.07.1973 um 00 GMT benutzt worden. Von den drei Experimenten sind zwei ausgeschrieben.

Es wurde die GK ausgerechnet, die zwischen Payerne (06610) und Zagreb (13130), und zwischen Milano (16080) und Zagreb wirkt. Die Resultate der Anwendung der verschiedenen Schemas sind in Tabelle 3 zusammengestellt.

Die Resultate zeigen, dass im Falle Payerne-Zagreb alle Schemas ungefähr den selben Wert der GK auf den k-Niveaus ergeben. Das Schema D ergibt die kleinsten Werte. Im Falle Milano-Zagreb ergibt das Schema D einen negativen Wert der GK, alle anderen Schemas ergeben ungefähr die gleichen GK-Werte. Voraussetzung ist, dass beim Schema D wegen der Eigenschaft des Schemas ein negativer GK-Wert vorkommt. Das Schema bestimmt genau den Geopotentialwert, so dass das erste Glied der GK genauer bestimmt ist als das zweite, das auf der Basis von Schema A berechnet wurde.

Schema 06610 - 13130

	k = 1	k = 3	k = 5	k = 7	k = 9
A	1015	524	257	139	92
B	1016	532	265	146	101
C	1228	587	290	167	101
D	1015	523	257	139	92
E	1154	583	289	167	101

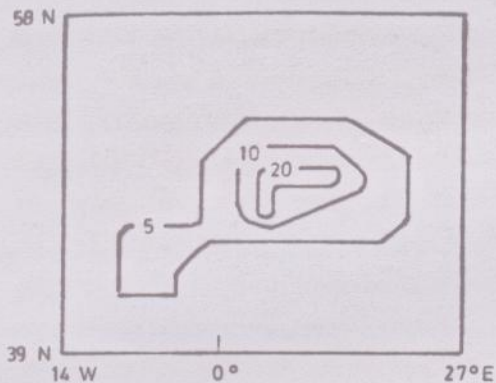
Schema 16080 - 13130

	k = 1	k = 3	k = 5	k = 7	k = 9
A	53	15	16	-23	21
B	66	32	31	-6	36
C	60	37	28	1	20
D	-11	-17	-8	-42	2
E	64	37	28	1	20

Tabelle 3: Die GK auf verschiedenen k-Niveaus nach den Schemas A - E, T durch Radiosondenaufstiege bestimmt. Alle Werte in m^2/s^2 .

4. DIE ANWENDUNG DES MODELLS 1 MIT SCHEMA C

In Modell 1 ist anstelle des Schemas C das Schema E verwendet worden (im weiteren Text Modell 2). Die Modelle 1 und 2 wurden ohne und mit Anwesenheit der Topographie geprüft. Die Topographie ist in Figur 1 gezeigt. Die Alpen sind durch 4 Punkte der Höhe 2000 m dargestellt.



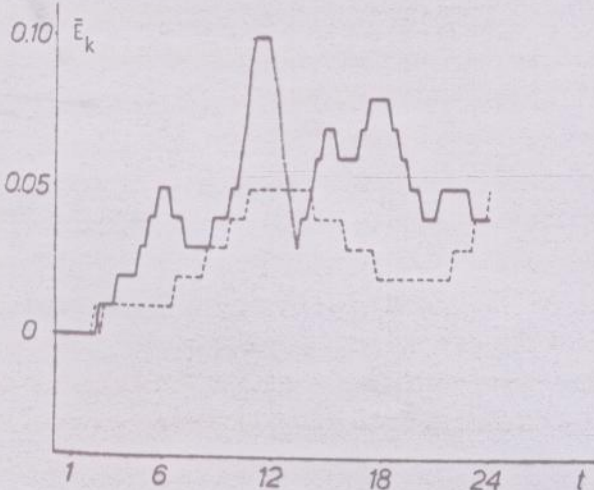
Figur 1: In Modell 1 und Modell 2 verwendete Topographie, Isohypsen ($m \times 10^7$)

Die Anfangsbedingungen sind mit der hydrostatischen Atmosphäre definiert mit

- a) vertikalem Temperaturprofil gemäss Gleichung (7),
- b) Bodendruck überall gleich 1000 mbar,
- c) Windabwesenheit auf allen Modellflächen.

Die Modellobergrenze liegt bei 100 mbar und die σ Flächenreihenfolge ist dieselbe wie in Schema A. Es wurde der Mittelwert der kinetischen Energie (\bar{E}_k) und der mittlere Bodendruck (\bar{P}_s) betrachtet.

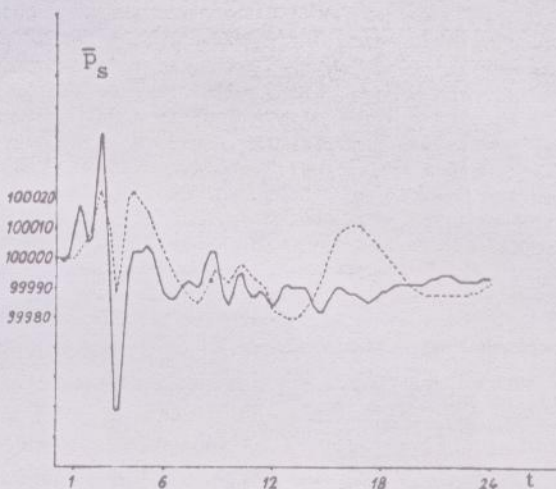
Im Experiment ohne Topographie kam es nicht zur Bildung von \bar{E}_k . In den Modellen mit Topographie kam es zur Bildung von \bar{E}_k , deren Wert in Figur 2 gezeigt ist. In Modell 2 kam es zu schwächerer \bar{E}_k -Bildung als in Modell 1, d.h. es erschienen auch kleinere Windwerte, die GK wurde in diesem Falle besser bestimmt.



Figur 2: Die \bar{E}_k (SI-Einheiten) in Abhängigkeit von der Zeit t (Stunden).

- ausgezogene Linie: Modell 1
- gestrichelte Linie: Modell 2

Beim Modell 2 resultierte in den ersten 6 "Stunden" der simulierten Zeit eine grössere \bar{P}_s -Amplitude als in Modell 1. Der \bar{P}_s ist in Figur 3 gezeigt.



Figur 3: Der \bar{P}_s (SI-Einheiten) in Abhängigkeit von der Zeit t (Stunden)

- ausgezogene Linie: Modell 2
- gestrichelte Linie: Modell 1

5. SCHLUSSBEMERKUNGEN

Diese Untersuchungen haben gezeigt, dass man im Falle der steilen Topographie aufmerksam das Schema für die Berechnung der Gradientkraft wählen muss. Die vorgeschlagene Auswahl des Schemas E, eingeschlossen in das numerische Modell für die Wetterprognose, hat sich energetisch stabil gezeigt. In weiteren Untersuchungen wird das Modell 2 mit reellen Anfangsbedingungen geprüft.

6. REFERENZEN

ARAKAWA, A., 1972: Design of the UCLA general circulation model, Numerical Simulation of Weather and Climate, Dept. of Meteorology, Univ. of California, Los Angeles, Tech. Rept. 7, 116 pp

CORBY, G.A., A. GILCHRIST, R.L. NEWSON, 1972: A general circulation model of the atmosphere, suitable for long period integrations, Quart. J.R. Met. Soc., 98, 809 - 832.

JANJIC, Z.I., 1977: Pressure gradient force and advection scheme used for forecasting with steep and small scale topography, Beitr. Phys. Atm. 50, 186 - 210.

MESINGER, F., 1977: Forward - backward scheme, and its use in a limited area model, Beitr. Phys. Atm., 50, 200 - 210.

PHILLIPS, N.A., 1974: Application of Arakawa's energy-conserving layer model to operational numerical weather prediction, National Meteorological Center Office Note 104, 40 pp.